26262 Ch 20 1886

Beiträge zur mathematischen Berechnung der Wirkung prismatischer Brillen.

Lane Medical Library

Inaugural-Dissertation

welche

nebst beigefügten Thesen

mit Genehmigung der

Medicinischen Facultät der Universität Breslau

zur Erlangung der

Doktorwürde in der Medicin und Chirurgie

Dienstag, den 18. Mai 1886, Nachmittags 4 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich vertheidigen wird

Arthur Groenouw,

prakt. Arzt.

Opponenten:

Dr. med. Maximilian Paul, Assistenzarzt am Hospital der Barmherzigen Brüder zu Breslau.

Dr. med. Paul Schulz. **Drd. med. Karl Becker.**

Breslau.

Druck der Bresl. Genossenschafts-Buchdruckerei, E. G.
Ursulinerstrasse 1.

Referent:
Herr Professor Dr. Foerster.

Seinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. Foerster

Director der Königlichen Universitäts-Klinik für Augenkranke
zu Breslau

in Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Vor Beginn meiner Arbeit ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. Foerster für die Anregung zu derselben und seine freundliche Unterstützung bei Anfertigung dieser Arbeit, sowie Herrn Professor Dr. O. E. Meyer, Director des physikalischen Kabinets zu Breslau, für seinen gütigen Rath und Beistand in einigen physikalischen Fragen, sowie für die freundliche Ueberlassung seiner eigenen Arbeit über denselben Gegenstand meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Trotzdem prismatische Brillen schon seit längerer Zeit in Gebrauch sind und besonders von Seiten derjenigen, welche das Entstehen und Ansteigen der Myopie bei längerer Beschäftigung mit sehr nahen Gegenständen nach der Convergenztheorie erklären, eine ausgedehnte Anwendung finden, so fehlt es doch bis jetzt fast vollständig an praktisch brauchbaren Tabellen über die Wirkung dieser Brillen. Der wichtigste Grund hierfür ist wohl der, dass die Wirkung der Prismen nicht so einfach zu berechnen ist, wie die gewöhnlicher Convex- oder Concavbrillen; denn während man bei diesen mit Hülfe der Brennweite durch eine sehr einfache Formel sofort die Bildweite aus einer gegebenen Objectweite berechnen kann, so giebt es leider für Prismen keine ohne weiteres bestimmbare Grundwirkung, welche zur Basis für die Berechnung dienen könnte, und noch viel weniger Formeln, aus denen sich die Wirkung des Prismas unter geänderten Verhältnissen in einfacher Weise annähernd genau bestimmen lässt. Daher bleibt nichts übrig, als für alle vorkommenden Fälle eine möglichst genaue Tabelle aufzustellen, welche für den praktischen Gebrauch genügt. Im Folgenden wollen wir nun näher betrachten, nach welchen Grundsätzen wir bei der Berechnung verfahren müssen, um Tabellen aufzustellen, welche angeben, in wie weit sich die Convergenz der Augenachsen durch die Anwendung prismatischer Brillen verringern lässt.

Die Wirkung eines Prismas beruht bekanntlich darauf, dass ein in dasselbe eintretender Lichtstrahl so von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird, dass er aus einer anderen Richtung herzukommen scheint. Für ein mit einem Prisma bewaffnetes Auge liegt also der gesehene Gegen-

stand an einer anderen Stelle, als die, an der er sich wirklich befindet. Es frägt sich nun, auf welche Weise der Grad der Ablenkung eines Lichtstrahls durch ein Prisma bestimmt werden soll. Das Einfachste scheint es zu sein, den Winkel zwischen dem einfallenden und austretenden Strahl zu bestimmen, was auch Donders gethan hat; aber diese Methode ist doch, so einfach und bequem sie auch in der Theorie erscheint, für den praktischen Gebrauch gänzlich unanwendbar. Es ist nämlich sehr schwer und bei kleinen Winkeln sogar fast unmöglich, sich eine einigermassen genaue Vorstellung von der Grösse eines Winkels zu machen; denn während es z. B. sehr leicht ist, etwa bei einem Strabismus anzugeben, dass das rechte Auge 6 mm zu weit nach innen stehe, so würde es doch selbst dem Geübten sehr schwer fallen, ohne besondere umständliche Messungen mit einer nur annähernd ebenso grossen Genauigkeit anzugeben, wie gross der Winkel zwischen den Achsen beider Augen bei einer gewissen Stellung derselben ist. Es muss daher die Berechnung nach Winkelgraden als praktisch unbrauchbar verworfen werden, und es käme nun die Frage in Betracht, ob man nicht die Abweichung der Augenachsen von der ursprünglichen Richtung ähnlich wie beim Strabismus nach der Grösse der Excursionen des Hornhautcentrums gegenüber den das Auge umgebenden Theilen bestimmen soll. Aber auch diese Art der Bestimmung ist mangelhaft; denn abgesehen davon, dass dieselbe nicht besonders genau gemessen werden kann, ist diese Methode zwar für den Strabismus, bei dem es sich um die Grösse der Verkürzung eines Augenmuskels handelt, sehr werthvoll, und eine Berechnung nach dieser Methode würde vielleicht zur Bestimmung von prismatischen Brillen bei Augenmuskellähmungen sehr brauchbar sein, aber für den hier ins Auge gefassten Zweck leidet sie an demselben Uebel, wie die Bestimmung nach der Grösse des Ablenkungswinkels, sie ist nämlich zu wenig anschaulich. Es bleibt daher als einzig rationelle Methode der Berechnung diejenige nach der Entfernung von Object und Bild,

wie bei Concav- und Convexgläsern, übrig, was besonders auch dann sehr zweckmässig ist, wenn sich die Berechnung, wie das im Vorliegenden der Fall ist, nur auf die Anwendung prismatischer Brillen zum Zwecke der Verringerung der Convergenz der Augenachsen bei Myopie bezieht. Das Object wird man sich nun jedenfalls am einfachsten in der Medianebene des Körpers oder, was dasselbe ist, in der Senkrechten auf der Mitte der Verbindungslinie beider Augen zu denken haben, da man ja bei genauerer Betrachtung ein Object stets so halten wird, dass es ungefähr in dieser Ebene liegt. Daher ist auch die Entfernung des Objectes vom Auge am besten auf dieser Ebene zu messen, zumal ja bei der Bestimmung des Grades der Myopie für beide Augen zugleich das Object als in dieser Ebene gelegen gedacht wird. Es stellt sich daher die Aufgabe jetzt folgendermassen:

„Vor dem Auge befindet sich ein Prisma mit der Basis nach innen (die Gründe hierfür werden wir später noch genauer kennen lernen), in einer gewissen Entfernung von dem Auge in der Medianebene des Körpers ist ein Object aufgestellt:

In welcher Entfernung scheint dem Auge das Object zu liegen, resp. wo liegt der Kreuzungspunkt der Sehlinien, wenn das Prisma eine gewisse Brechkraft hat?“

Der scheinbare Ort des Bildes ist natürlich derjenige Punkt, in welchem sich die Sehlinien beider Augen schneiden, oder in welchem die Sehlinie des einen Auges die Medianebene schneidet. Letzteres ist insofern der Fall, als ja für jedes Auge das Object gleich weit entfernt ist, und da, vorausgesetzt dass sich vor beiden Augen gleiche Prismen befinden, auch die Ablenkung der Sehlinien beider Augen genau gleich resp. symmetrisch sein muss, so dass diese sich in der Medianebene des Körpers schneiden. Ferner befinden sich aber auch Object, Bild und Mitte zwischen beiden Augen nicht nur in der Medianebene des Körpers, sondern auch in einer geraden Linie, da ja das Prisma wohl eine Ablenkung nach der Seite hin, also eine Knickung

des Lichtstrahls in der Horizontalebene, nicht aber eine Ablenkung nach oben oder unten hin bewirken kann. Nach diesen Grundsätzen hat vor einiger Zeit Herr Professor Dr. O. E. Meyer zu Breslau auf Veranlassung des Herrn Professor Dr. Foerster eine Tabelle berechnet, welche im Archiv für Augenheilkunde von Knapp und Schweigger Band XIV (1885) Seite 327 veröffentlicht ist. Dieselbe ist aber für Ophthalmologen noch nicht ganz ausreichend, da sie nur für Prismen mit geringem brechendem Winkel gilt und auch nur die Objectweite für eine gegebene Bildweite und nicht auch das Umgekehrte angiebt. Herr Professor Dr. Meyer hatte die Güte, mir seine Arbeit zur Verfügung zu stellen, und werde ich im Folgenden mehrfach auf dieselbe Bezug nehmen.

Bisher war als Ausgangspunkt für die Messungen immer nur von der Mitte zwischen beiden Augen die Rede, doch muss noch genauer festgestellt werden, welcher Punkt damit gemeint ist. Man kann nämlich entweder die Mitte der Verbindungslinie der beiden Prismen, also die Mitte der Brille, als Anfangspunkt wählen, oder die Mitte der Verbindungslinie der Scheitel beider Hornhäute (Pupillardistanz) oder endlich die Mitte der Basallinie, d. h. der Verbindungslinie der Drehpunkte beider Augen, worunter man in jedem Auge denjenigen Punkt versteht, welcher stets dieselbe Lage gegenüber der Umgebung des Auges einnimmt, gleichviel welche Bewegung dieses auch ausführt.

Die Basallinie resp. deren Mittelpunkt ist offenbar für die Rechnung am geeignetsten, da dieselbe sich nicht ändert, welche Stellung das Auge auch einnimmt, so dass also die Entfernung des Drehpunktes des Auges von dem Mittelpunkt der Basallinie, also die halbe Basallinie, eine Grösse, welche in der Rechnung eine sehr wichtige Rolle spielt, stets constant bleibt. Es eignet sich also dieser Punkt besonders als Ausgangspunkt für die Messung nicht nur deshalb, weil seine Lage eine constante ist, denn das ist bei den Mittelpunkten der beiden anderen Linien ungefähr auch der Fall, sondern auch, weil die Linie, auf der

er liegt, stets eine bestimmte Länge hat. Trotzdem leidet diese Linie an einigen Uebelständen, welche aber nicht so gross sind, um sie für die Praxis unbrauchbar zu machen. Es liegt nämlich der Drehpunkt des Auges 10,957 mm, also etwa 11 mm hinter dem Scheitel der Hornhaut, so dass man nicht ohne weiteres die Entfernung eines Objectes von dem Drehpunkt des Auges messen kann, da der einzige sicher messbare Punkt am Auge das Hornhautcentrum ist, wogegen der Drehpunkt einer einfachen directen Messung unzugänglich ist. Ferner ist nicht nur die Lage des Drehpunktes selbst, sondern auch die Entfernung der beiden Drehpunkte von einander, also die Basallinie, ohne umständliche Messungen nur indirect zu bestimmen. Sie ist nämlich ungefähr gleich der Entfernung der beiden Hornhautcentra resp. der Mittelpunkte der beiden Pupillen von einander bei der sogenannten Primaerstellung der Augen, eine Entfernung, die man gewöhnlich als Pupillardistanz bezeichnet. Diese geringen Nachtheile der Basallinie fallen aber gegenüber den erwähnten grossen Vortheilen nicht in's Gewicht, nur muss man sich bei allen Messungen, welche man ja immer auf's Hornhautcentrum bezieht, daran erinnern, dass die Basallinie etwa 1 cm hinter demselben liegt, so dass man also zu der gefundenen Entfernung eines Punktes von der Hornhaut noch 1 cm hinzuaddiren muss, um die Entfernung desselben Punktes von der Basallinie zu erhalten.

Als einen anderen Ausgangspunkt für die Messung könnte man die Mitte der Verbindungslinie der beiden Hornhautcentra annehmen. Diese Linie ändert jedoch ihre Länge, je nachdem die Augen auf einen fernen oder nahen Gegenstand eingestellt sind, je nachdem ihre Achsen also mehr oder weniger convergiren. Es wird diese Entfernung also beim Betrachten eines nahen Gegenstandes kleiner, beim Betrachten eines fernen dagegen grösser, so dass man für jede Objectdistanz, d. h. also für jede Convergenzstellung der Augenachsen erst diese Entfernung berechnen und dann in die Rechnung einsetzen müsste. Ferner wird

sich diese Linie bei starker Convergenz der Augenachsen dem Körper etwas nähern, bei geringer Convergenz etwas von demselben entfernen, da bei der Bewegung des Auges noch innen das Hornhautcentrum sich nach innen und hinten bewegt. Diese Linie hat also weder eine constante Lage noch Grösse, sie ist also als Ausgangspunkt für die Messung nicht geeignet.

Der dritte Punkt endlich, welcher sich als Ausgangspunkt für die Messung eignen würde, nämlich die Mitte der Brille, kann wohl kaum in Betracht kommen, da die Entfernung eines Objectes von der Brille, so bequem sie auch zu messen ist, doch keine irgendwie rationelle zum Auge in genauer Beziehung stehende Grösse ist; denn die Entfernung der Brille vom Auge kann wechseln, und ferner ist das Auge auch oft beim Anstellen der Messung nicht mit einer Brille bewaffnet. Es empfiehlt sich also als Ausgangspunkt für die Messung nur die Mitte der Basallinie.

Um über die Wirkung eines einzelnen Prismas in einem gegebenen Falle genauere Berechnungen anstellen zu können, muss man irgend eine Wirkung des Prismas als Basis für die Berechnung annehmen. So einfach dies nun auch bei Concav- und Convexgläsern ist, bei denen die Brennweite eine ganz natürliche und einfach zu bestimmende Grösse ist, so schwer ist es bei Prismen, einen ähnlichen Werth aufzufinden; denn die gewöhnliche Bestimmung eines Prismas nach dem Winkel der brechenden Kante ist zwar sehr bequem, aber doch auch sehr ungenau, da die Wirkung des Prismas ausser von diesem Winkel hauptsächlich noch von dem Brechungsindex des Crownglases, welches ja für Brillen nur verwendet wird, abhängt. Unter Brechungsindex versteht man bekanntlich das Verhältniss zwischen der Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft und in dem betreffenden Glase, dieser Brechungsindex schwankt nun aber für die Linie E des Spectrums von 1,531 — 1,618, je nach dem Material, aus dem das Glas bereitet worden ist. Ferner aber ist dieser Index nur durch sehr complicirte Versuche und Berechnungen zu bestimmen und wird auch

nie bei dem gewöhnlichen käuflichen Glase angegeben, so dass es z. B. nicht möglich war, denselben auf Erkundigungen beim Opticus hin zu erfahren. Da also zur genauen Bestimmung der Wirkung eines Prismas auf demselben nicht nur der brechende Winkel, sondern auch der Brechungsindex des Glases angegeben sein müsste, was wohl kaum zu erreichen sein wird, so muss man sich nach einer anderen rationellen Methode umsehen. Dies wäre vielleicht die Angabe der Grösse des Winkels, um welchen ein in das Prisma eintretender Lichtstrahl von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird, was um so mehr zu empfehlen wäre, als dieser Winkel bei wechselndem Einfallswinkel aber gleich bleibendem Prismenwinkel nicht gar zu grossen Schwankungen unterliegt, doch stösst dies wieder auf dieselben Schwierigkeiten der Bestimmung, wie vorher. Endlich wäre vielleicht am besten und für den vorliegenden Fall am geeignetsten die Bestimmung nach der Entfernung von Bild und Object, also etwa die Angabe, in welcher Entfernung sich ein Object von der Basis des Prismas befinden muss, damit sein Bild in unendlicher Ferne erscheint, was sich für den hier ins Auge gefassten Zweck so formuliren liesse: „Wie weit muss ein Object vom Auge entfernt sein, damit die Achsen beider Augen parallel sind, wenn sie das Object durch das betreffende Prisma betrachten?“ Bei dieser Bestimmung darf man jedoch nicht vergessen, dass es hierbei auch auf die Höhe des Prismas, d. h. die Entfernung der brechenden Kante von der Basis ankommt, so dass dadurch wieder eine neue, nur durch Einführung eines willkürlichen Masses zu hebende Schwierigkeit eintritt, welche noch dadurch vermehrt wird, dass die Bestimmung dieser Entfernung eben so schwer ist, wie die aller vorherigen. Es bleibt also für die Praxis trotz ihrer Unvollkommenheit nur die Angabe des brechenden Winkels eines Prismas als Mass für seine brechende Kraft übrig, eine Grösse, die vorläufig um so mehr anzuwenden ist, als bei der Herstellung der sphärischen Brillengläser ja auch der Brennpunkt nur nach dem Radius der Schleif-

schalen bestimmt wird, indem die Gläser, ohne besondere Rücksicht auf die brechende Kraft der gerade benutzten Glassorte auf denselben Formen geschliffen werden und nach der Grösse der Krümmung dieser Form ihre Nummer erhalten. Es wird also die Grösse des Fehlers, welcher bei der Berechnung der brechenden Kraft eines Prismas nach dem brechenden Winkel vorhanden ist, nicht grösser sein, als bei der Berechnung der Wirkung eines sphärischen Glases nach der auf ihm angegebenen Nummer, wobei man freilich nie vergessen darf, dass man bei sphärischen Gläsern den Fehler insofern corrigiren kann, als man die Ent fernung, in welcher durch ein sphärisches Glas ein Object, z. B. eine Schriftprobe, noch deutlich gesehen wird, ziemlich genau messen kann, während man bei einem Prisma den Ort des Bildes nicht so genau bestimmen kann.

Bisher ist bei der Betrachtung der Wirkung prismatischer Brillen noch ein Punkt unerörtert geblieben, nämlich die Stellung des Prismas gegenüber dem Auge. Zunächst wird sich das Prisma, wie jede andere Brille, nicht unmittelbar vor dem Auge, sondern in einer gewissen Entfernung von demselben befinden, ein Umstand, der bisher zum Theil schon Berücksichtigung gefunden hat. Es kommt aber noch etwas anderes hinzu, was sich bei sphärischen Gläsern nicht findet. Jede Brille ist nämlich so eingerichtet, dass die Fassung der beiden Brillengläser in einer Ebene liegt, welche der Frontalebene des Körpers parallel ist; bei den sphärischen biconcaven und biconvexen Gläsern ist es nun ganz selbstverständlich, dass die Mittelebene jedes solchen Glases, also die Ebene, welche bei auf beiden Seiten in gleicher Weise geschliffenen Gläsern das Glas in eine vordere und eine hintere einander genau gleiche Hälften theilt, in der Ebene der Brillenfassung liegt, also parallel der Frontalebene des Körpers ist. Bei auf beiden Seiten ungleichartig geschliffenen, sogenannten periscopischen Gläsern, z. B. Convex-concav-Gläsern, wird eine ähnliche Ebene gegeben durch die Grundfläche der Calotte, welche die Oberfläche jedes kreisrunden sphärischen Glases

bildet. Ist das Glas cylindrisch, so ist eine Ebene mit ähnlichen Eigenschaften dargestellt durch die Ebene, welche parallel zur Achse des Cylinders gestellt den betreffenden Theil des Cylinders abschneidet. Jedes solche Glas ist also im Verhältniss zur Fassung der Brille gleichmässig angeordnet, es fällt sein Mittelpunkt und sein Schwerpunkt zusammen, dagegen bei den prismatischen Brillen verhält sich die Sache anders. Es wird zwar für den hier ins Auge gefassten Zweck das Prisma so gestellt sein müssen, dass es nur eine Ablenkung in der Horizontalebene bewirkt, aber keine Ablenkung nach oben oder unten hin, es wird also die brechende Kante stets vertical stehen müssen, resp. eine auf ihr senkrecht stehende Ebene horizontal, aber damit ist die Stellung des Prismas noch nicht genau bestimmt. Das Prisma kann nämlich so in dem Brillengestell angebracht sein, dass es, falls es gleichseitig ist, durch die Ebene desselben halbirt wird, also durch eine Frontalebene in eine vordere und eine hintere unter einander gleiche Hälften getheilt wird, oder aber es kann die hintere Fläche des Prismas parallel der Ebene der Brille, also der Frontalebene, sein. Es frägt sich nun, welche Stellung des Prismas für den praktischen Gebrauch besser geeignet ist. Die erste Stellung, symmetrisch zur Fassung der Brille, ist entschieden das Natürlichere, da ja auch die sphärischen Gläser in derselben Weise gefasst werden, doch ist diese Stellung nur für Prismen von geringem brechendem Winkel möglich, da bei grösserem Winkel die Dicke des Prismas so bedeutend wird, dass es unmöglich ist, dasselbe in der eben angegebenen Weise ins Brillengestell einzusetzen, da dann ein sehr grosser Theil des Prismas hinter der Brille zwischen dieser und dem Auge sich befinden würde, wodurch natürlich die Bewegung der Augenlider erschwert und behindert werden würde, indem die Wimpern gegen das Brillenglas anstossen. Schon bei den gewöhnlichen sphärischen Brillen spielt dieser Factor eine nicht unbedeutende Rolle, indem bei gewisser Formation der Nase in Folge des schlechten Sitzens der Brille die

Wimpern an das Brillenglas anstossen, so dass man in diesen Fällen besondere Brillengestelle anwenden muss, bei denen sich die Gläser weiter vom Auge entfernt befinden als der auf der Nase aufsitzende Steg (sogenannter „Bismarcksteg"). Es ist also die bisher betrachtete Stellung des Prismas nur für dünnere Prismen, also solche mit schwachem brechendem Winkel brauchbar, während bei grösserer Dicke doch die zweite Stellung, nämlich mit der hinteren Fläche parallel der Frontalebene, eintreten müsste; denn im letzteren Falle befindet sich vor dem Auge eine vollständig ebene Fläche, welche über die Ebene der Brille nach hinten nicht hervorragt und also die Bewegung der Lider und Wimpern nicht mehr hindert, während der grösste Theil des Prismas vor der Brille liegt und so die Bewegung des Auges in keiner Weise stören kann. Da man also bei stärker brechenden Prismen gezwungen ist, die letztere Art der Fassung anzuwenden, so empfiehlt es sich, dieselbe überhaupt für alle Fälle in Anwendung zu bringen; denn wollte man eine künstliche Grenze feststellen, z. B. 8^0 brechenden Winkel, so würde dies leicht zu Verwechselungen führen und bei falscher Fassung des Prismas würde die Wirkung desselben natürlich eine andere als die berechnete sein. Freilich ist hierbei der eine Uebelstand vorhanden, dass bei dieser Art der Fassung der Querschnitt des Prismas ein rechtwinkliges Dreieck ist, dessen lange Kathete parallel der Frontalebene verläuft und in der Ebene des Brillengestelles liegt, während die kurze in der Sagittalebene liegende Kathete sich an der Innenseite der Brille, also an der nasalen Seite jedes Brillenglases befindet und die Hypotenuse schräg von hinten und aussen nach vorn und innen verläuft, so dass an der inneren Seite der Brille ein nicht unbedeutendes Stück des Glases über die Brillenfassung hervorsteht, welches durch das von seinem Rande ausgehende zerstreute Licht eine gewisse Blendung hervorbringt. Trotz dieses geringen Nachtheils empfiehlt sich aber doch die eben angegebne Art der Fassung des Prismas in Folge ihrer sonstigen Vorzüge ganz entschieden.

Ehe wir der Berechnung näher treten, ist es nothwendig, uns über die Wirkung eines Prismas mit besonderer Berücksichtigung des vorliegenden Falles noch einmal genau klar zu werden. Die diesbezüglichen Bemerkungen sind der mir freundlichst überlassenen Arbeit des Herrn Professor Dr. Meyer entnommen. Fällt ein Lichtstrahl auf ein Glasprisma und wird durch dasselbe gebrochen, so erfolgt die Ablenkung des Lichtstrahls stets in dem Sinne, dass seine Richtung sich gegenüber der früheren Richtung von der berechnenden Kante entfernt. Meist findet sowohl beim Eintritt des Strahles in das Glas als auch beim Austritt aus demselben eine Ablenkung des Strahles in dem gleichen Sinne statt, so dass er sich bei jeder der beiden Brechungen von der brechenden Kante entfernt. Dieser Fall, an welchen man bei der Brechung eines Lichtstrahls in einem Prisma fast immer zuerst und meist auch nur allein denkt, findet jedoch nicht immer statt, wie durch Fig. 1—4 näher erläutert ist. Ist der brechende Winkel des Prismas gross, z. B. 60°, so findet stets bei beiden Brechungen das gleiche Verhalten statt, so dass der Strahl sich beide Male von der brechenden Kante entfernt. Fig. 1 zeigt den Verlauf des Strahles a b c d für den Fall der kleinsten Ablenkung, in welchem der austretende Strahl c d symmetrisch zu dem einfallenden a b liegt. Es wird dann also der eintretende Strahl a b in b nach dem Einfallsloth ef, d. h. der Senkrechten auf MP in b zugebrochen, da er ja aus einem dünneren Medium, der Luft, in ein dichteres, das Glas, übergeht, wobei er nach bekannten physikalischen Gesetzen dem Einfallslothe zugebrochen werden muss. Der Strahl geht dann in der Richtung bc || MN weiter und wird nun in c beim Austritt aus dem Prisma von dem Einfallslothe fg weggebrochen und erhält die Richtung cd, so dass $\angle$ gcd $>$ $\angle$ bcf ist. Es ist also bei b der Strahl so gebrochen worden, dass seine Richtung sich von der brechenden Kante P entfernt hat, und dasselbe ist auch in c der Fall gewesen, so dass also die Grösse des Ablenkung des austretenden Strahles c d gegenüber dem einfallenden

Strahle ab gleich der Summe der Ablenkung in b und c ist. In dem hier speciell ins Auge gefassten Falle, dass bc || MN ist, ist die Grösse der erfolgten Ablenkung das Minimum der möglichen Ablenkung. In Fig. 2 bildet der Strahl bc mit dem Einfallsloth in c einen kleineren Winkel als in Fig. 1, die in c eintretende Brechung wird also ebenfalls kleiner. Würde der Winkel von bc gegen das in c errichtete Loth = 0 werden, würde der Strahl also ⊥ PN treffen, so würde auch keine Brechung in c erfolgen. Bei einem Prisma von 60° kann dies nicht eintreten, weil in diesem Falle der Winkel des Strahles bc mit dem in b errichteten Lothe, also der Brechungswinkel bei der ersten Brechung 60° betragen müsste. Das ist aber nicht möglich, weil der einem Einfallswinkel von 90° entsprechende grösste Werth des Brechungswinkels im Glase etwa 42° ausmacht. Jedoch ist der Fall, dass der Lichtstrahl das Prisma durch die Austrittsfläche ungebrochen verlässt, sie also senkrecht trifft, stets möglich, wenn der Winkel des Prismas kleiner als 42° ist. Bei einem Prisma von 30° kann dieser Fall also eintreten, was Fig. 3 zeigt, dann verlässt also der Strahl b c das Prisma, ohne in c gebrochen zu werden. Wird der Einfallswinkel noch grösser, so tritt der in Fig. 4 gezeichnete Fall ein, es wird also der Strahl ab in b in der Richtung bc gebrochen, er entfernt sich also in seiner Richtung gegenüber der ursprünglichen Richtung von der brechenden Kante. Da sich jedoch das Einfallsloth in c nicht mehr, wie in Fig. 1 und 2, für den innerhalb des Prismas verlaufenden Theil des Strahles auf der der Basis des Prismas MN zugekehrten Seite des Strahles befindet, sondern auf der entgegengesetzten Seite, oder da mit anderen Worten gesagt ∠ bcP nicht mehr spitz, sondern stumpf ist, so erfolgt jetzt die Ablenkung in c so, dass der Strahl, indem er beim Austritt aus dem Prisma wieder mit dem Einfallsloth einen grösseren Winkel bildet, gegen die brechende Kante hin gebrochen wird, nicht mehr von derselben weg. Der Lichtstrahl verfolgt also den zweimal in entgegengesetzter Weise geknickten Weg a b c d, die in

diesem Falle schliesslich erreichte Ablenkung des Lichtstrahles ist nicht, wie in den bisher betrachteten Fällen, die Summe der bei den beiden Brechungen eintretenden Ablenkungen, sondern die Differenz derselben. Diese Art der Brechung hat für den ersten Augenblick etwas Ueberraschendes und Eigenthümliches, da man gewöhnt ist, immer anzunehmen, dass der Strahl durch's Prisma zweimal in derselben Richtung gebrochen wird, aber doch ist sie es gerade, welche bei der vorliegenden Betrachtung hauptsächlich in Frage kommt, während sie nämlich in einem Prisma mit grossem brechendem Winkel niemals eintritt, ist sie in einem Prisma, dessen brechender Winkel sehr spitz ist, als die Regel anzusehen; denn ein Prisma, dessen Winkel nur wenige Grade beträgt, ist einem Planglase ähnlicher als einem Prisma von 60°. Es findet ja auch in einem Planglase bei schrägem Einfall der Strahlen stets eine solche Brechung statt, dass der Lichtstrahl zweimal in entgegengesetzter Richtung um dieselbe Grösse abgelenkt wird und dann wieder in einer der ursprünglichen parallelen Richtung austritt.

Fassen wir noch einmal alles bisher Betrachtete ins Auge und formuliren wir auf Grund desselben die uns gestellte mathematische Aufgabe, so lautet dieselbe folgendermassen: „Es befindet sich in einer gewissen Entfernung vor einem Auge ein Prisma, dessen dem Auge zugekehrte Fläche parallel der Frontalebene des Körpers ist; auf einer in der Mitte der Basallinie errichteten, in der Horizontalebene liegenden Senkrechten befindet sich in gewisser Entfernung ein leuchtender Punkt; wo schneidet die Sehlinie eines Auges, das diesen Punkt durch das Prisma betrachtet, die Senkrechte, wenn der brechende Winkel des Prismas eine bestimmte Grösse hat?“ In Fig. 5 ist SF die Senkrechte auf der Mitte der Basallinie, der Drehpunkt des Auges befindet sich in A, die von A auf SF gefällte Senkrechte AS ist also die halbe Basallinie, also ungefähr gleich der halben Pupillardistanz, NPM ist das (der Deutlichkeit halber in Fig. 5 sehr gross gezeichnete) Prisma, dessen

hintere Fläche PN, welche sich in dieser einen horizontalen Durchschnitt darstellenden Figur natürlich nur als Linie zeigt, $\perp$ SF steht, da sie ja parallel der Frontalebene liegen soll, während MPN den brechenden Winkel des Prismas darstellt. L ist das auf SF befindliche Object, welches für die Berechnung nur als leuchtender Punkt angenommen wird. Ein von L ausgehender Lichtstrahl LE wird in E und D so gebrochen, dass er den Weg LEDA verfolgt; er wird also dem in A befindlichen Auge in der Richtung DA also aus dem Punkte F, in welchem die Verlängerung von DA die Linie SF schneidet, zu kommen scheinen. Fig. 5 stellt natürlich die Verhältnisse nur für ein Auge, in dem gezeichneten Falle nur für das linke Auge dar, bei dem rechten Auge sind die Verhältnisse aber ebenso, so dass auch für dieses das Bild des leuchtenden Punktes L durch ein ebensolches Prisma, wie MPN, ebenfalls in F zu liegen scheint und beide Augen von demselben leuchtenden Punkte nur ein Bild erhalten. Der Lichtstrahl, welcher von L nach dem Auge A gelangt, schlägt dabei folgenden Weg ein, er trifft die Fläche MP des Prismas in E und wird dem hier errichteten Einfallslothe EJ zugebrochen, kommt also in die Richtung ED, dann muss er PN so treffen, dass $\angle$ EDN ein spitzer, höchstens ein rechter Winkel ist; denn im letzteren Falle geht der Strahl ungebrochen durch und trifft also das Auge parallel der Richtung SF, dann stehen aber auch die Achsen beider Augen parallel der Richtung SF, d. h. beide Augen sind auf einen unendlich weit entfernten Punkt gerichtet, sie haben die Primärstellung, dieser Fall ist aber meist die Grenze dessen, was wir für den hier ins Auge gefassten Zweck erreichen wollen. Würde nämlich der Strahl ED so auf PN treffen, dass $\angle$ EDN stumpf würde, dann würde er in D so gebrochen werden, dass er sich von der brechenden Kante P noch mehr entfernt, und würde dann das Auge so treffen, dass dieses abducirt sein müsste, dasselbe wäre dann aber auch auf dem andern Auge der Fall, so dass beide Augen divergent schielen müssten, was wir bei

Anwendung prismatischer Brillen nur selten bezwecken. Es kann daher hier nur der Fall in Betracht kommen, dass ∠ EDN spitz ist, dann ist KG das Einfallsloth und der Strahl ED wird in D so gebrochen, dass er nun nach der brechenden Kante zu geknickt wird. Es wird der Strahl also immer, wenn die Augen überhaupt noch convergiren und nicht etwa divergent schielen, zweimal in entgegengesetzter Richtung gebrochen, wie dies an Fig. 4 erörtert worden ist.

Setzt man nun zur Vereinfachung der Rechnung den brechenden Winkel des Prismas ∠ MPN = ε, die Einfalls- und Brechungswinkel der Reihe nach α, β, γ, δ, so kommen folgende Grössen in Betracht:

SF = f, dies ist die Entfernung des Schnittpunktes der Sehlinien von dem Mittelpunkt der Basallinie (Bildweite),

LS = l, Entfernung des Objectes oder leuchtenden Punktes von dem Mittelpunkte der Basallinie (Objectweite),

LM = y, Entfernung des Objectes von der vorderen Fläche des Prismas,

MN = d, Dicke des Prismas an der Medianebene des Körpers, aber nicht etwa an der Brillenfassung gemessen,

NP = h, Höhe des Prismas von der Medianebene bis zur brechenden Kante, aber nicht etwa der Längsdurchmesser des Brillenglases (= 50 mm),

NS = b, Entfernung der Brille von der Basallinie (Brillenweite), (= 25 mm),

AS = p, die Hälfte der Basallinie (= 30 mm).

Die Aufgabe wäre es nun, aus der gegebenen Objectweite l, die Entfernung des Schnittpunktes der Sehlinien (Convergenzpunktes) f zu bestimmen, wobei natürlich p, b, ε gegeben sein muss, dies ist aber nur durch sehr umständliche Rechnung möglich, daher ist es besser, den umgekehrten Weg einzuschlagen und l aus f zu berechnen, es ist nämlich

$$(1)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{f}$$

$$GK \parallel FS \text{ also } \angle\delta = \angle\varphi,$$

ferner ist $\frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = n$, nach dem bekannten Brechungsgesetz, wobei n der Brechungscoefficient von Glas und Luft ist, d. h. das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts in der Luft und im Glase,

$$(2)\quad \text{daher ist } \sin\gamma = \frac{1}{n}\sin\delta = \frac{1}{n}\sin\varphi$$

$$\angle EDP = R + \gamma$$
$$\angle PED = R - \beta$$
$$\angle EDP + \angle PED = 2R - (\beta - \gamma)$$
$$\angle EDP + \angle PED = 2R - \varepsilon$$
$$\beta - \gamma = \varepsilon$$

$$(3)\quad \text{daher } \beta = \varepsilon + \gamma$$

nach dem Brechungsgesetz ist ferner

$$(4)\quad \sin\alpha = n\sin\beta.$$

$$(5)\quad d = h\operatorname{tg}\varepsilon.$$

Setzt man DN = x, so ist

$$x = NF \cdot \operatorname{tg}\varphi = (f - b)\operatorname{tg}\varphi$$

zieht man DM und setzt es = z und setzt ferner

$$\angle DMN = \mu$$
$$\angle DME = \nu$$
$$\angle EMN = \vartheta$$

so ist

$$(6)\quad \operatorname{tg}\mu = \frac{x}{d} = \frac{(f-b)\operatorname{tg}\varphi}{d}$$

ferner ist

$$z = \frac{d}{\cos\mu}$$

setzt man EM = v, so ist in $\triangle$ MED

$$\frac{v}{z} = \frac{\sin EDM}{\sin MED}$$

$$\angle EDM = \angle GDM - \gamma = DMN - \gamma = \mu - \gamma$$
$$\text{da } GD \parallel MN$$
$$\angle MED = R + \beta$$

also ist $$v = z \frac{\sin(\mu - \gamma)}{\sin(R + \beta)} = z \frac{\sin(\mu - \gamma)}{\cos \beta}$$

setzt man den Werth für z ein, so ist

$$v = \frac{d \sin(\mu - \gamma)}{\cos \mu \cos \beta}.$$

In $\triangle$ EML verhält sich

$$\frac{y}{v} = \frac{\sin \zeta}{\sin \lambda}$$

$$\lambda = \vartheta - \zeta$$

$$\vartheta = R - \varepsilon$$

$$\zeta = R - \alpha$$

$$\vartheta - \zeta = \alpha - \varepsilon \text{ also } \lambda = \alpha - \varepsilon$$

setzt man die Werthe für λ und ζ ein, so ist

$$\frac{y}{v} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \varepsilon)}$$

$$y = \frac{v \cos \alpha}{\sin(\alpha - \varepsilon)}$$ setzt man den Werth für v ein, so ist

$$(7) \quad y = \frac{d \sin(\mu - \gamma) \cos \alpha}{\cos \mu \cos \beta \sin(\alpha - \varepsilon)}$$

Aus den 7 hier mit Zahlen bezeichneten Gleichungen kann man dann der Reihe nach die verschiedenen Werthe ausrechnen und so schliesslich den Werth für y finden, woraus l sehr leicht durch die Gleichung zu bestimmen ist

$$l = y + d + b.$$

Bei dieser Art der Berechnung wird der Werth für l genau berechnet, doch genügt für den praktischen Gebrauch eine einfachere Formel. Ist nämlich die Dicke des Prismas so gering, dass man sie vernachlässigen kann, so kann man an Stelle der beiden brechenden Flächen des Prismas nur eine einzige annehmen, welche mit der hinteren, dem Auge zugekehrten Fläche des Prismas zusammenfällt. Durch diese Fläche wird der Lichtstrahl um dieselbe Grösse von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt, wie vorher durch die Brechung an beiden Flächen des Prismas. Diese Verhältnisse zeigt Fig. 6, bei welcher die

Bezeichnungen eben so gewählt worden sind, wie bei Fig. 5.*) In dieser Fig. 6 ist wieder SF die Mittellinie, A der Drehpunkt des Auges, AS die halbe Basallinie, ND ist die $\perp$ SF stehende brechende Fläche des Prismas, der leuchtende Punkt befindet sich in L und der von ihm ausgehende Strahl LD wird in D so gebrochen, dass er die Richtung DA erhält. Die Verlängerung von DA schneidet SN in F, wo also das Bild von L zu liegen scheint. Errichtet man GK $\perp$ DN, so ist dies das letzte Einfallsloth und $\angle$ ADK $= \delta$ ist der letzte Brechungswinkel, entsprechend $\angle \delta$ der Fig. 5. Führen wir nun dieselben Bezeichnungen ein, wie bei der vorigen Berechnung, so sind natürlich in dieser Figur die $\angle \alpha, \beta, \gamma$ gar nicht vorhanden, wir bedürfen derselben jedoch, um den Grad der Ablenkung des Lichtstrahles zu bestimmen, und können für dieselben selbstverständlich dieselben Formeln anwenden, wie bei Fig. 5, es ist nämlich

$$(1) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{f}$$

$$(2) \quad \sin \gamma = \frac{1}{n} \sin \varphi$$

$$(3) \quad \sin \alpha = n \sin (\varepsilon + \gamma)$$

ferner ist nach Fig. 6

$$x = NF \operatorname{tg} \varphi = (f - b) \operatorname{tg} \varphi$$

$$y = x \operatorname{ctg} \lambda$$

$$\lambda = \alpha - \varepsilon \text{ wie vorher bewiesen}$$

also $y = x \operatorname{ctg} (\alpha - \varepsilon)$ setzt man den Werth für x ein, so ist

$$(4) \quad y = (f - b) \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} (\alpha - \varepsilon)$$

Wir haben also zur Berechnung die 4 hier mit Nummern bezeichneten Gleichungen. In Wirklichkeit lassen sich dieselben jedoch noch etwas vereinfachen, da nämlich bei den verschiedenen Prismen, also für verschiedene Werthe von ε, immer dieselben Werthe von f wiederkehren, und da ferner die halbe Basallinie p stets dieselbe Grösse hat, so wird auch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{p}{f}$ für denselben Werth von f stets dieselbe

*) Die punktirten Linien A, D, F, und D, L, dürfen bei der gegenwärtigen Betrachtung nicht berücksichtigt werden.

Grösse haben, eben so auch $\sin \gamma = \frac{1}{n} \sin \varphi$ für denselben Werth von f stets gleich gross sein, da ja n, der Brechungscoefficient des Glases, ganz unabhängig von dem brechenden Winkel des Prismas ist. Endlich aber wird auch der in Gleichung 4 vorkommende Factor $(f - b) \operatorname{tg} \varphi$ für einen bestimmten Werth von f ohne Rücksicht auf das Prisma stets gleich gross sein, gleiche Grösse von b vorausgesetzt. Letzterer Werth wird sich bei der logarithmischen Berechnung in den Werth

$$\log (f - b) + \log \operatorname{tg} \varphi$$

verwandeln. Setzt man also für f die Werthe 100, 200.... 1000 mm ein und berechnet die dazu gehörigen Werthe von y und setzt man ferner n = 1,531, b = 25 mm, p = 30 mm, so ergiebt sich folgende, die Rechnung sehr vereinfachende Tabelle:

Tabelle I.

Hülfstabelle für die Berechnung
log 1,531 (n) = 0,18498

f mm	$\angle \gamma$	log (f − b) + log tg φ
100	10°49′	1,35218
200	5°34′	1,41913
300	3°44′	1,43933
400	2°48′	1,44909
500	2°15′	1,45484
600	1°52′	1,45864
700	1°36′	1,46132
800	1°24′	1,46333
900	1°15′	1,46489
1000	1° 7′	1,46612

Benutzt man diese Tabelle, so braucht man nur noch in Gleichung 3 den Werth für γ und ε und den daraus berechneten Werth für α in Gleichung 4 einzusetzen, um y zu erhalten. Die Berechnung der Werthe auf diese Weise wollen wir im Folgenden der Einfachheit halber stets als „abgekürzte“ Berechnung bezeichnen, wogegen mit „genauer oder ausführlicher“ Berechnung die Berechnung

der Werthe nach den an der Hand der Fig. 5 erörterten 7 Formeln gemeint ist, wobei man natürlich die vorstehenden Tabellen ebenfalls benutzen kann. Da jedoch bei Anwendung der abgekürzten Berechnung ein Fehler gemacht wird, indem die Dicke des Prismas ausser Berücksichtigung bleibt, der zwar für die praktische Verwendung der Tabellen gering ist, aber für die aus den Tabellen zu ziehenden Folgerungen doch immerhin erheblich genug, so ist mit Hülfe der ausführlichen Berechnung die Differenz zwischen den erhaltenen Werthen bei genauer und bei abgekürzter Berechnung für l bei gegebenem f bestimmt worden. Die Grösse l und nicht etwa y muss man vergleichen bei beiden Berechnungen, da ja y in Fig. 5 gleich LM, in Fig. 6 dagegen gleich LN ist, so dass man also in Fig. 5 noch MN, die Dicke des Prismas hinzuaddiren muss, um einen mit LN in Fig. 6 vergleichbaren Werth zu erhalten. Es ergiebt sich dann, wie die folgende Tabelle zeigt, das Resultat, dass diese Differenz bei gleichem $\angle \varepsilon$ für verschiedene Werthe von f — hier sind nur die Grenzwerthe von 100 und 1000 berechnet, bei denen ja die Differenz am grössten sein muss — fast gleich ist und noch nicht so viel beträgt als 1 mm. Man kann daher die durch die abgekürzte Berechnung gefundenen Werthe bis auf 1 mm genau machen, wenn man zu ihnen die auf diese Weise gefundene Differenz hinzuaddirt. Die folgende Tabelle giebt an, um wieviel mm bei genauer Berechnung der Werth von l grösser ist als bei abgekürzter Berechnung.

Tabelle II.

Correctionstabelle zur Verminderung des Fehlers bei abgekürzter Berechnung.

f mm	3° mm	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	
100	0,61	0,87	1,13	1,42	1,73	2,1	2,40	2,7	3,5	4,39	5,3	6,32	7,43	l
1000	0,7	1,02	1,36	1,76	2,06	2,36	2,73	3,2	3,86	4,61	5,38	6,16	6,99	l

Unter Berücksichtigung dieser Correction ist die folgende Tabelle angefertigt,*) indem zu den nach den vereinfachten Formeln berechneten Werthen noch die in Tabelle II angegebene Grösse addirt worden ist, so dass in Tabelle III die Werthe für l in mm bis auf 1 mm genau angegeben sind, wogegen für y der wirklich berechnete Werth ohne Correction eingetragen worden ist.

Tabelle III.

Berechnete Werthe für y und α, für $l = y + b$ unter Correction nach Tabelle II.

Werthe in mm. $p = 30$ mm, $b = 25$ mm, $n = 1{,}531$ mm, $h = 50$ mm.

	$\varepsilon = 3^0$			$\varepsilon = 4^0$			$\varepsilon = 5^0$		
f mm	y mm	l mm	$\angle\alpha$	y	l	$\angle\alpha$	y	l	$\angle\alpha$
100	67,44	93,0	21°27′	65,16	91,0	23°3′	62,955	89,1	24°40′
200	146,1	172	13°11′	138,08	164	14°44′	131,37	158	16°18′
300	213,19	239	10°20′	198,61	225	11°53′	185,11	211	13°27′
400	272,1	298	8°54′	248,78	275	10°27′	229,06	255	12°
500	322,51	348,0	8°3′	290,66	317	9°36′	265,22	291	11°8′
600	366,67	392	7°28′	328,62	355	9°	295,88	322	10°33′
700	406,89	432,5	7°3′	359,54	386	8°36′	323,51	350	10°8′
800	443,41	469	6°45′	388,02	414	8°17′	343,70	370	9°50′
900	474,62	500	6°31′	411,94	438	8°3′	362,51	389	9°36′
1000	504,7	530,4	6°19′	434,64	460,7	7°51′	381,59	408,0	9°23′

	$\varepsilon = 6^0$			$\varepsilon = 7^0$			$\varepsilon = 8^0$		
f mm	y mm	l mm	$\angle\alpha$	y	l	$\angle\alpha$	y	l	$\angle\alpha$
100	60,880	87,3	26°17′	58,818	85,5	27°56′	56,828	83,9	29°36′
200	124,74	151	17°53′	118,90	146	19°27′	113,25	140	21°3′
300	173,63	200	15°	163,17	190	16°34′	153,86	181	18°8′
400	212,20	239	13°33′	197,62	224	15°6′	184,52	212	16°40′
500	243,22	270	12°41′	224,03	251	14°15′	207,60	235	15°49′
600	269,02	296	12°6′	246,60	274	13°39′	227,05	254	15°13′
700	290,68	317	11°41′	264,85	292	13°14′	242,60	270	14°48′
800	309,37	336	11°22′	280,43	307	12°55′	255,75	283	14°29′
900	324,68	351	11°08′	293,08	320	12°41′	266,33	294	14°15′
1000	338,87	365,6	10°56′	304,70	331,8	12°29′	276,75	304,1	14°2′

*) Diese Tabelle stimmt mit der l. c. veröffentlichten, von Herrn Prof. Dr. O. E. Meyer berechneten Tabelle nicht genau überein, da dieselbe für eine andere Stellung des Prismas berechnet ist.

$\varepsilon = 9^0$				$\varepsilon = 10^0$			$\varepsilon = 12^0$		
f mm	y mm	l mm	$\angle \alpha$	y	l	$\angle \alpha$	y	l	$\angle \alpha$
100	54,952	82,3	31°16′	53,093	80,8	32°58′	49,557	78,1	36°25′
200	108,09	136	22°39′	103,24	131	24°16′	94,513	123	27°31′
300	145,31	173	19°43′	137,42	165	21°19′	123,73	152	24°32′
400	172,69	200	18°15′	162,27	190	19°50′	144,39	173	23°1′
500	193,39	220,9	17°23′	180,96	209	18°57′	159,37	188	22°8′
600	210,33	238	16°47′	195,88	224	18°21′	171,33	200	21°32′
700	224,26	252	16°21′	207,59	236	17°56′	180,60	209	21°6′
800	235,00	263	16°3′	217,33	245	17°37′	188,09	217	20°47′
900	244,00	272	15°49′	225,09	253	17°23′	194,00	223	20°33′
1000	252,80	280,5	15°36′	232,63	260,8	17°10′	199,69	228,6	20°20′

$\varepsilon = 14^0$				$\varepsilon = 16^0$			$\varepsilon = 18^0$		
f mm	y mm	l mm	$\angle \alpha$	y	l	$\angle \alpha$	y	l	$\angle \alpha$
100	46,161	75,5	39°59′	42,882	73,2	43°41′	39,674	71,0	47°33′
200	86,671	116	30°51′	79,605	110	34°15′	73,134	104	37°45′
300	111,96	141	27°48′	101,72	132	31°8′	92,624	124	34°32′
400	129.35	159	26°16′	116,58	147	29°34′	105,45	137	32°56′
500	141,77	171	25°22′	126,98	157	28°39′	114,31	145,5	32°
600	151,47	181	24°45′	135,06	165	28°1′	121,15	152	31°21′
700	158,96	188,5	24°19′	141,21	172	27°35′	126,28	157,5	30°54′
800	165,10	195	23°59′	146,11	176,5	27°15′	130,37	162	30°34′
900	169,74	199	23°45′	150,03	180	27°	133,59	165	30°19′
1000	174,16	203,8	23°32′	153,57	184	26°47′	136,51	167,7	30°6′

$\varepsilon = 20^0$			
f mm	y mm	l mm	$\angle \alpha$
100	36,478	68,9	51°40′
200	67,156	99,5	41°21′
300	84,468	117	38°2′
400	95,612	128	36°23′
500	103,23	135,5	35°26′
600	109,07	141	34°46′
700	113,44	146	34°18′
800	116,90	149	33°58′
900	119,64	152	33°42′
1000	121,99	154	33°29′

Um die Resultate dieser Tabelle etwas anschaulicher zu machen, ist es am besten, dieselbe graphisch darzu-

stellen. Zu diesem Zwecke trägt man auf einem mit einem Netzwerk von kleinen Quadraten versehenen Bogen Papier, etwa gewöhnlichem Schreibpapiere, wie es in Schulen zu Rechenheften benutzt wird, auf eine horizontale Abscisse die Grössen von f, also 10, 20 . . . . 100 cm auf und zeichnet als verticale Ordinaten die zugehörigen Grössen von 1 ein; indem man diese Punkte mit einander verbindet, erhält man für jeden Prismenwinkel eine bestimmte Curve, welche angiebt, wo das Object liegen muss, wenn sich das Bild in der durch die Abscisse angegebenen Entfernung vom Auge befindet. Diese Curve lehrt, dass die Wirkung der Prismen mit kleinem brechendem Winkel wenigstens für geringere Entfernungen, um die es sich ja hier hauptsächlich handelt, eine sehr geringe ist, während sie mit der Grösse der Entfernung sehr bedeutend steigt, eben so zeigt sich auch, dass in der Wirkung der schwächeren Prismen etwa von 3—6° ein relativ viel grösserer Unterschied ist als in der Wirkung der stärkeren Prismen, weshalb auch für die stärkeren Prismen von 10° an die Wirkung nur immer für eine Differenz von 2° berechnet worden ist. Warum als schwächstes Prisma 3° gewählt worden sind, erhellt aus der Tabelle, denn ein noch schwächeres Prisma würde so gut wie gar keine Wirkung haben, während 20° als stärkstes Prisma deshalb gewählt worden ist, weil die Anwendung noch stärkerer Prismen an der Dicke des zu verwendenden Brillenglases scheitern würde, da gar zu dicke Prismen nicht mehr in ein gewöhnliches Brillengestell zu fassen sind und auch den Patienten, der die Brille doch täglich mehrere Stunden tragen müsste, durch ihr Gewicht sehr belästigen würden. Ein weiterer aber noch viel schlimmerer Umstand ist der, dass stärkere Prismen eine sehr bedeutende chromatische Aberration haben, so dass durch sie alle Gegenstände mit bunten Rändern erscheinen, was bei Crownglas, das einen starken Brechungsindex hat, in besonders hohem Masse der Fall ist. Schon bei Prismen von 10° ist dies sehr störend, bei Prismen von 20° aber so stark, dass sie sich zum andauernden

Lesen nicht eignen. Das gewöhnliche Mittel, die chromatische Aberration zu vermeiden durch Combination eines Crown- und Flintglasprismas, wie dies bei den achromatischen Linsen geschieht, ist deshalb nicht anwendbar, weil dadurch das zu verwendende Prisma eine solche Dicke erhalten würde, dass es eine besondere Fassung von zwei röhrenförmigen Ringen nach Art eines sehr niedrigen Krimmstechers bekommen müsste, was natürlich wieder andere grosse Uebelstände im Gefolge haben würde. Auch kann man nicht etwa ein solches zusammengekittetes Prisma durch Abschleifen dünner machen, da dann ja an der inneren oder äusseren Seite des Prismas nur eine einfache Lage Crown- resp. Flintglas vorhanden wäre und nur in der Mitte beide Glassorten übereinander liegen würden, wodurch das Prisma natürlich gänzlich unbrauchbar würde. Vielleicht liesse sich aber auf eine andere Weise die starke Farbenzerstreuung der Prismen vermeiden, nämlich durch die Anwendung gefärbter Prismen, welche ja nur wenige Farben hindurch lassen und so keine oder nur eine sehr geringe Farbenzerstreuung geben müssen, was wahrscheinlich am einfachsten dadurch erreicht wird, dass auf die Rückseite des Prismas eine dünne Platte des farbigen, z. B. blauen Glases aufgekittet wird. Freilich hat dies auch den Nachtheil, dass dadurch die Helligkeit der durch das Prisma betrachteten Objecte vermindert wird. Es ist also sehr zweifelhaft, ob die Anwendung starker Prismen überhaupt möglich sein wird, oder ob nicht in Folge der angegebenen Verhältnisse eine nicht zu überschreitende Grenze für die Anwendung stärkerer Prismen gezogen ist.

Die oben angeführte Tabelle giebt die Grösse der Objectweite bei gegebener Bildweite an, ein Weg, der bei der Berechnung deshalb eingeschlagen wurde, weil er der bedeutend einfachere ist; die umgekehrte Berechnung, nämlich die Bildweite aus der gegebenen Objectweite zu bestimmen, ist viel schwieriger und führt stets, selbst bei Annahme einiger Vereinfachungen, welche jedoch das Resultat der Rechnung ungenau machen, zu einer ziemlich complicirten

quadratischen Gleichung, daher ist diese gerade für die Praxis wichtigste Angabe nicht direct berechnet worden, sondern einmal einer nach den obigen Angaben gezeichneten graphischen Darstellung entnommen worden, und ferner aus Tabelle III berechnet worden, indem die zwischen 2 berechneten liegenden Werthe als proportional, d. h. in arithmetischer Reihe ansteigend angenommen worden sind, was in der graphischen Darstellung durch eine gerade Linie ausgedrückt wird, während die Linie eigentlich etwas gekrümmt sein müsste.

Die Zwischenwerthe sind in folgender Weise berechnet worden. Will man z. B. wissen, wie gross f ist, wenn $l = 80\,\text{mm} \angle \varepsilon = 9^0$, so ersieht man aus Tabelle III, dass bei $\varepsilon = 9^0$,

wenn $l = 82{,}3\,\text{mm}$ ist, $f = 100\,\text{mm}$ ist,

ist also $l = 1\,\text{mm}$, so ist $f = \frac{100}{82{,}3}\,\text{mm}$

und ist $l = 80\,\text{mm}$, so ist $f = \frac{80 \cdot 100}{82.3} = 97\,\text{mm}$.

Will man für $l = 220$, $\varepsilon = 7^0$ die Grösse f berechnen, so ist nach Tabelle III

für $l = 224\,\text{mm}$ $f = 400\,\text{mm}$

für $l = 190\,\text{mm}$ $f = 300\,\text{mm}$

wächst also l um 34 mm, so wächst f um 100 mm

wächst also l um 1 mm, so wächst f um $\frac{100}{34}\,\text{mm}$

wächst also l um 30 (=220−190) mm, so wächst f um $\frac{30 \cdot 100}{34} = 88\,\text{mm}$

ist also $l = 190 + 30 = 220\,\text{mm}$, so ist $f = 300 + 88 = 388\,\text{mm}$.

Die auf diese Weise berechneten Werthe sind nicht absolut genau, da jedoch Tabelle III bis auf 1 mm genau ist, so wird auch in der folgenden Tabelle der Fehler nicht viel grösser sein und jedenfalls 1 cm nicht übersteigen, so dass er für die Praxis nicht ins Gewicht fällt. Um Rechnungsfehler möglichst auszuschliessen, wurden die durch Ablesen aus der Zeichnung gewonnenen und die berechneten Werthe mit einander verglichen und etwaige Fehler ver-

bessert, ferner aber wurde noch eine Zeichnung angefertigt,*) bei welcher l als Abscisse und die Werthe von f als Ordinaten aufgetragen wurden, die so für jedes Prisma erhaltene Curve muss natürlich einen regelmässigen Verlauf haben, jeder ein- oder ausspringende Winkel zeigt mit grösster Sicherheit einen Rechenfehler an. Trägt man in eine solche Zeichnung noch die Curve für ein Prisma von 0^0 ein, welche natürlich eine grade Linie ist, die die Punkte, an denen $f = l$ ist, miteinander verbindet, so wird die Darstellung dadurch sehr anschaulich. Denkt man sich nämlich das Auge in irgend einem Punkte der horizontalen Abscisse befindlich und zieht in diesem Punkte die Ordinate und nimmt gleichzeitig an, in dem Schnittpunkte dieser Ordinate mit der geraden Linie für 0^0 befinde sich das Object, so liegt das Bild desselben oder der Convergenzpunkt in dem Schnittpunkt dieser Ordinate mit der Curve des betreffenden Prismas, z. B. 6^0. Man kann sich auf diese Weise die Wirkung jedes Prismas für jede beliebige Entfernung sofort sehr gut klar machen, besonders wenn die Zeichnung etwa wie die beiliegende in $^1/_5$ der natürlichen Grösse angefertigt ist, so dass also ein Theilstrich des Massstabes der Zeichnung je 1 cm entspricht. Die Entfernungen der Objecte in der ersten Reihe der folgenden Tabelle sind so berechnet worden, dass dieselben etwa wie die Brennweiten der alten nach Zollen berechneten Brillengläser oder wie $^1/_3$ D aufeinander folgen, nur anfangs bis 10 cm ist der Unterschied grösser, nämlich etwa 1 D. Die Werthe, welche grösser sind als 100 cm, sind nur der Vollständigkeit halber hinzugefügt, machen aber, da sie ausserhalb der in Tabelle III berechneten Werthe liegen, auf grosse Genauigkeit keinen Anspruch, sie sind deshalb mit einem Stern (*) versehen worden.

Die folgende für den praktischen Gebrauch bestimmte Tabelle giebt also in der ersten verticalen Reihe an, wieviel cm das in der Mittellinie liegende Object von der

*) S. die beiliegende Tafel.

Basallinie entfernt liegt, wenn bei der in der ersten horizontalen Reihe angegebenen Grösse des Prismenwinkels der Schnittpunkt der Sehlinien um so viel cm vom Auge entfernt liegt, als die Zahl angiebt, welche in der zu dem betreffenden Prismenwinkel gehörigen verticalen Reihe steht. Haben wir also z. B. einen Myopen, welcher ohne Glas oder selbst bei der besten Correction das Object höchstens 22 cm weit vom Auge entfernt halten kann, und wollen wir bewirken, dass die Sehlinien nach einem 40 cm weit gelegenen Punkte hin convergiren, so suchen wir zunächst die Entfernung des Objectes, 22 cm, in der ersten verticalen Reihe auf und suchen dann in der zugehörigen horizontalen Reihe nach der Zahl 40, wir finden indessen nur 38,8 und 43,5, wozu, wenn wir die betreffenden verticalen Reihen aufwärts verfolgen, die Prismenwinkel von 7° und 8° gehören, es wird also ein Prisma von 7° oder 8° ungefähr die verlangte Wirkung haben.

In den in der Tabelle nicht ausgefüllten Feldern beträgt die Bildweite mehr als 100 cm.

Ist das Object von der Basallinie entfernt cm	so liegt der Schnittpunkt der Sehlinien von der Basallinie entfernt bei einem Prismenwinkel von												
	3° cm	4° cm	5° cm	6° cm	7° cm	8° cm	9° cm	10° cm	12° cm	14° cm	16° cm	18° cm	20° cm
$6^{2}/_{3}$	7,1	7,3	7,5	7,6	7,8	7,9	8,1	8,3	8,5	8,8	9,1	9,4	9,7
7	7,5	7,7	7,9	8,0	8,3	8,4	8,5	8,6	9,0	9,3	9,6	9,9	10,4
$7^{2}/_{3}$	8,2	8,4	8,6	8,8	8,9	9,1	9,3	9,5	9,8	10,3	10,9	11,8	12,6
8	8,6	8,8	9,0	9,2	9,3	9,5	9,7	9,9	10,4	11,1	11,8	12,7	13,6
9	9,7	9,9	10,1	10,5	10,7	11,0	11,5	11,8	12,7	13,6	14,6	15,8	16,9
10	10,9	11,2	11,6	12,0	12,3	12,9	13,3	13,8	14,9	16,0	17,3	18,8	20,3
$10^{1}/_{2}$	11,5	11,9	12,3	12,8	13,1	13,8	14,3	14,8	16,0	17,3	18,6	20,5	23,1
11	12,2	12,6	13,0	13,6	13,9	14,6	15,2	15,8	17,1	18,5	20,0	23,0	26,0
$11^{1}/_{2}$	12,8	13,3	13,8	14,4	14,8	15,5	16,1	16,8	18,2	19,8	22,3	25,5	28,9
12	13,4	14,0	14,5	15,2	15,6	16,4	17,0	17,8	19,3	21,6	24,5	28,0	32,7
$12^{1}/_{2}$	14,1	14,7	15,2	15,9	16,4	17,3	18,0	18,8	20,7	23,6	26,8	30,8	37,3
13	14,7	15,3	15,9	16,7	17,2	18,2	18,9	19,8	22,4	25,6	29,1	34,6	42,7
14	15,9	16,7	17,4	18,3	18,9	20,0	21,1	22,6	25,9	29,6	35,3	43,5	58,2
15	17,2	18,1	18,8	19,8	20,9	22,4	23,8	25,6	29,3	35,0	43,0	56,9	83,3
16	18,5	19,5	20,4	21,8	23,2	24,9	26,5	28,5	33,8	40,8	53,8	75,6	*130,0
17	19,7	21,0	22,3	23,9	25,5	27,3	29,2	32,0	38,6	49,2	67,1	*108,5	
18	21,2	22,6	24,2	25,9	27,7	29,8	32,6	36,0	44,7	59,0	90,0		
19	22,7	24,3	26,0	28,0	30,0	32,9	36,3	40,0	51,7	72,3	*115,0		
20	24,2	25,9	27,9	30,0	32,9	36,1	40,0	45,3	60,0	92,1			
22	27,2	29,2	32,0	35,1	38,8	43,5	49,5	57,3	85,0	*133,8			
25	31,9	35,0	39,3	43,5	49,6	57,9	68,6	86,3	*138,2				
27	35,3	39,0	44,2	50,0	58,3	70,0	87,8	*111,3					
30	40,4	46,0	52,9	61,9	75,3	96,0	*122,9						
33	46,4	53,4	63,2	76,8	98,3	*126,0							
35	50,5	58,7	70,0	89,3	*115,0								
37	55,0	64,8	80,0	*102,7									
40	62,0	75,0	95,8										
43	69,4	86,7	*116,8										
45	74,8	95,2											
47	80,3	*103,9											
50	90,0												

In den oben angeführten Formeln sind eine Reihe von Grössen als constant angenommen worden, welche dies eigentlich nicht sind, nämlich p, n, b, d. h. die Basallinie, der Brechungsindex des Glases und die Entfernung der Brille vom Auge. Was zunächst den Brechungsindex des Glases, die Grösse n, anbetrifft, so schwankt dieselbe von 1,531—1,618. In der obigen Berechnung ist sie als 1,531 angenommen worden, es ist also der niedrigste Werth in die Rechnung eingesetzt worden; nimmt man jedoch den höchsten Werth 1,618, so ergiebt sich gegenüber der Tabelle III eine Differenz, welche in der folgenden Tabelle angegeben ist. Es wird dann nämlich der Werth für 1 um so viel kleiner, die Wirkung des Prismas also um so viel grösser, als die folgende Tabelle in mm, nicht in cm, wie Tabelle IV angiebt.

Tabelle V.

Diese Tabelle giebt an, um wie viel mm 1 kleiner wird als in Tabelle III angegeben, wenn n = 1,618 ist.

f mm	3° mm	8° mm	10° mm	20° mm
100	0,43	2,11	2,37	3,32
1000	36,3	29,88	26,67	16,87

Dieser Einfluss, welcher sich am meisten bei grosser Bildweite und kleinem Prismenwinkel geltend macht, beträgt höchstens 36,3 mm, also etwa 4 cm, er kann also beim praktischen Gebrauch ausser Acht bleiben.

Der Einfluss von b, d. h. der Entfernung der Brille von der Basallinie, ist in der folgenden Tabelle angegeben. In der Rechnung ist b = 25 mm gesetzt worden, setzt man es jedoch = 35 mm, so ergiebt sich gegenüber der Tabelle III eine Differenz in dem Sinne, dass bei gleicher Grösse von f, also bei gleicher Bildweite, die Objectweite grösser wird, da ja das Prisma dem Auge ferner steht, es wird also gegenüber der Tabelle III der Werth von 1 um die im Folgenden angegebene Zahl von mm grösser.

Tabelle VI.

Ist b = 35 mm, so ist l gegenüber Tabelle III um so viel grösser, als Tabelle VI angiebt.

f mm	$\varepsilon = 7^0$ mm	$\varepsilon = 20^0$ mm
100	2,4	6,0
1000	6,9	9,0

Die Entfernung der Brille vom Auge ist also nur von geringem Einfluss auf das Resultat.

Was den Einfluss der Basallinie anbetrifft, so ist dieselbe zu 60 mm angenommen worden, sie variirt jedoch etwa zwischen 48—72 mm, so dass also die Grösse p von 24—36 mm schwankt. Setzt man p = 25, statt wie bisher = 30 mm, und berechnet nach den gegebenen Formeln für eine gegebene Grösse von f die zugehörige Grösse von l, so ergiebt sich z. B. für $\varepsilon = 3^0$, f = 1000 mm für l eine Verminderung um 45 mm gegenüber Tabelle III, bei $\varepsilon = 3^0$ f = 500 mm ist dieselbe 18 mm, bei $\varepsilon = 20^0$ f = 1000 mm ist sie 17,8 mm.

Da dieser Einfluss nicht unbedeutend ist, so müssten eigentlich ganz neue Tabellen für jede Basallinie, oder, da sie ungefähr gleich der Pupillardistanz ist, für jede Pupillardistanz berechnet werden, jedoch ist dies durch eine einfache Berechnung zu umgehen.

Denkt man sich nämlich in Fig. 6 an Stelle der halben Basallinie AS = p die halbe Basallinie A,S = p, und zieht A,F, ∥ AF, verlängert ND bis D, und zieht D,L, ∥ DL, so wird offenbar ein von L, in der Richtung L,D, ausgehender Lichtstrahl, der das auf eine einzige brechende Fläche reducirt gedachte Prisma ND, in D, trifft, dort genau um eben so viel von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt werden, als der Strahl LD in D, d. h. es wird der gebrochene Strahl D,A, ∥ DA verlaufen, denkt man sich nun das Auge in A,, so ist A,S die halbe Basallinie = p,, und wir können nun für eine beliebige andere Basallinie p,, bei der sich das Object in L, und das Bild in F, befindet, die

Wirkung für ein bestimmtes Prisma berechnen, wenn wir dessen Wirkung für $p = 30$ mm kennen. Setzt man $L,S = l,$, $F,S = f,$, so verhält sich

$$L,N : LN = D,N : DN = A,S : AS = p, : p$$
$$L,N = L,S - NS = l, - b$$
$$LN = LS - NS = l = b$$
$$\text{folglich } l, - b : l - b = p, : p$$

daher ist

$$(1) \quad l, = (l - b)\frac{p,}{p} + b = (l - 25)\frac{p,}{30} + 25 \text{ mm}$$

ferner verhält sich

$$F,S : FS = A,S : AS$$

oder

$$f, : f = p, : p$$

daher ist

$$(2) \quad f, = \frac{p,}{p} \cdot f = \frac{p,}{30 \text{ mm}} \cdot f.$$

Hat man also z. B. mit einer Basallinie von 64 mm ($p = 32$) zu thun, und will man wissen, wo bei 18 cm Objectweite (l) und einem Prismenwinkel von 7° der Convergenzpunkt liegt, so setzt man in Formel 1 für $l = 180$ mm und für $p, = 32$ mm, dann ist

$$l, = (180 - 25)\frac{32}{30} + 25 = 190 \text{ mm}$$

nach Tabelle IV ist bei $l = 18$ cm und $\varepsilon = 7°$ $f = 27{,}7$ cm oder 277 mm, setzt man dies in Formel 2 ein, so ist

$$f, = \frac{32}{30} \cdot 277 = 295 \text{ mm},$$

es liegt also bei $\varepsilon = 7°$, $p, = 32$ mm und $l, = 19$ cm, das Bild in 29,5 cm Entfernung, es sollte nun aber für $l, = 18$ cm das Bild gesucht werden, es muss also l kleiner als 18 cm gesetzt werden, etwa = 17 cm, dann ist nach Formel 1

$$l, = (170 - 25)\frac{32}{30} + 25 = 180 \text{ mm},$$

es hat dann also $l,$ die gewünschte Grösse, da nun nach Tabelle IV bei $l = 17$ cm und $\varepsilon = 7°$ $f = 255$ mm ist, so ist nach Formel 2

$$f, = \frac{32}{30} \cdot 255 = 272 \text{ mm}$$

es ist also bei $l, = 18$ cm und $\varepsilon = 7°$ $f, = 27{,}2$ cm.

Auf ähnliche Weise kann man für jede beliebige Basallinie für eine gegebene Grösse von l das zugehörige f berechnen.

In den meisten Fällen wird man auch bei anderer Basallinie als 60 mm die Umrechnung auf die betreffende Basallinie nicht vorzunehmen brauchen, sobald man sich nur erinnert, dass bei grösserem Betrage dieser Entfernung als dem der Rechnung zu Grunde gelegten auch die zu demselben l gehörige Grösse von f grösser wird, als in der Tabelle angegeben, und umgekehrt. Bei Berücksichtigung dieser Regel werden die Tabellen auch ohne besondere Berechnung für jede Basallinie mit ziemlich grosser Sicherheit des Resultates zu brauchen sein. Ob und in wie weit die Tabellen auch bei anderer Anwendung von prismatischen Brillen, z. B. bei Augenmuskellähmungen, brauchbar sein werden, darüber wage ich es nicht, ein Urtheil abzugeben.

Lebenslauf.

Verfasser, Arthur Oskar Ewald Groenouw, evangelisch, geboren am 27. März 1862 zu Ratibor, als Sohn des Kaufmanns Oskar Groenouw und seiner Ehefrau Hulda, geb. Ohlert, besuchte das Gymnasium zu Waldenburg in Schlesien bis Ostern 1874 und darauf das Johannes-Gymnasium zu Breslau, welches er Ostern 1881 mit dem Zeugniss der Reife verliess. Hierauf widmete er sich an der Universität zu Breslau dem Studium der Medicin, bestand daselbst am 25. Mai 1883 das Tentamen physicum, am 27. April 1885 das Examen rigorosum und am 17. März 1886 die medicinische Staatsprüfung. Während des Sommer-Semesters 1883 war er an der Königl. Universitätsklinik für Augenkranke als Unterassistent thätig; dem Leiter dieser Anstalt, Herrn Professor Dr. Foerster, fühlt sich Verfasser zu besonderem Danke verpflichtet.

Während seiner Studienzeit besuchte Verfasser die Vorlesungen, Kliniken und Curse folgender Herren Professoren und Docenten:

DDr. Berger, Biermer, Born, F. Cohn, Fischer, Foerster, Fraenkel, Fritsch, Gottstein, Grützner, Gscheidlen, Haeser, Hasse, Heidenhain, Hirt, Joseph, Loewig, Meyer, Neisser, Poleck, Ponfick, Richter, Röhmann, Roux, Soltmann, Strasser, Unverricht, Wiener.

Allen diesen Herren, seinen hochverehrten Lehrern, spricht Verfasser hiermit seinen ergebensten Dank aus.

Thesen.

1) Die Anwendung schwacher prismatischer Brillen bei hochgradiger Myopie ist nutzlos.

2) Die Canalisation in Verbindung mit Wasserclosets ist das beste Mittel zur schnellen Entfernung der menschlichen Auswurfsstoffe aus grossen Städten.

3) Der acute Gelenkrheumatismus ist eine Infectionskrankheit.

4) Bei Croup und Diphtheritis ist die Tracheotomie bei den ersten Anzeichen einer beginnenden Asphyxie indicirt.

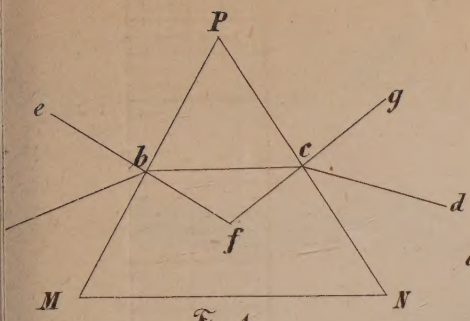


Fig. 1.

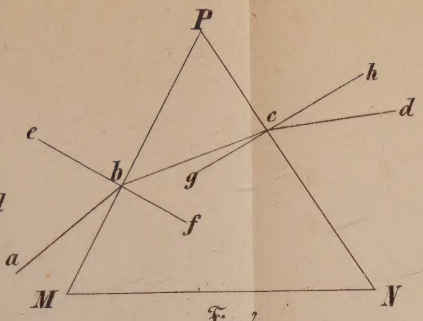


Fig. 2.

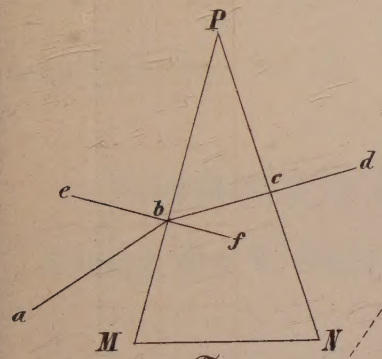


Fig. 3.

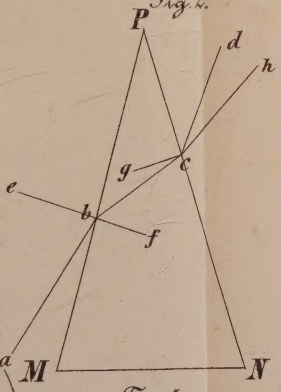


Fig. 5.

Fig. 6.

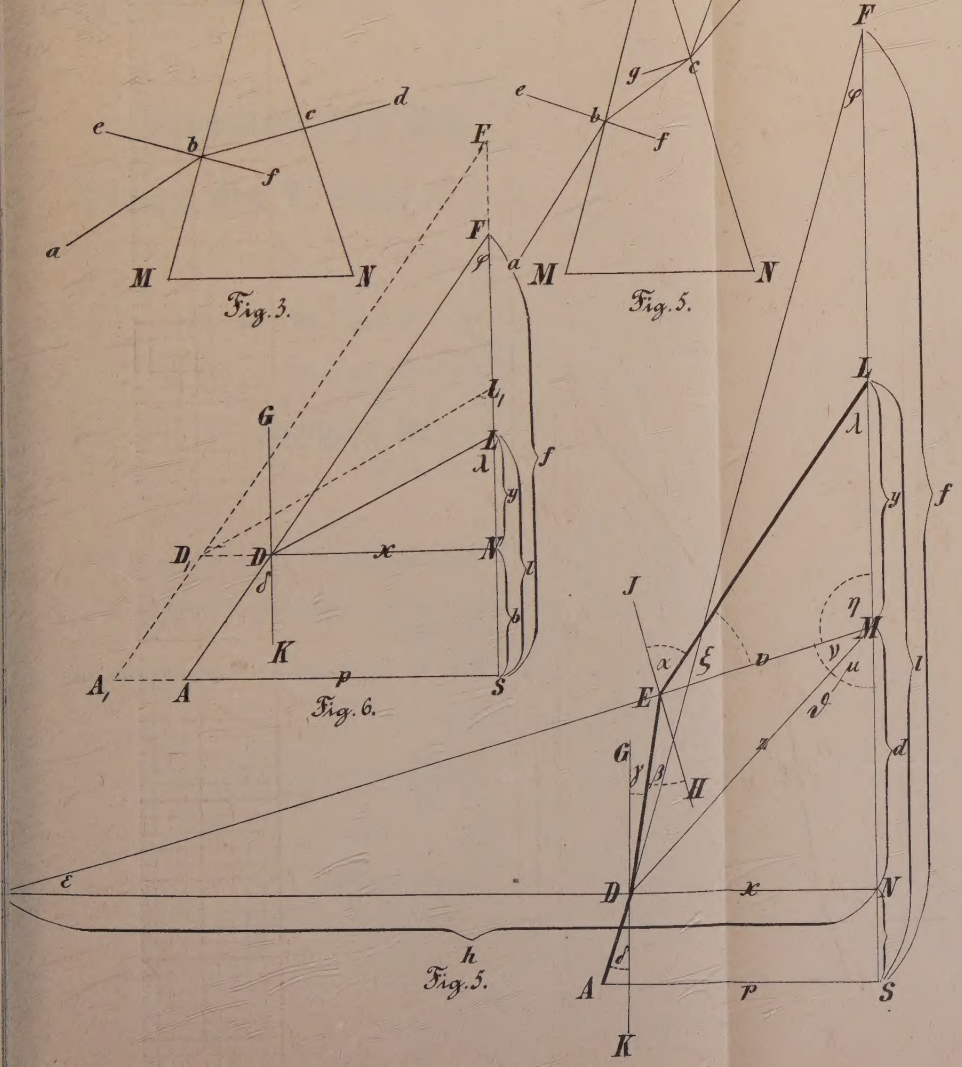
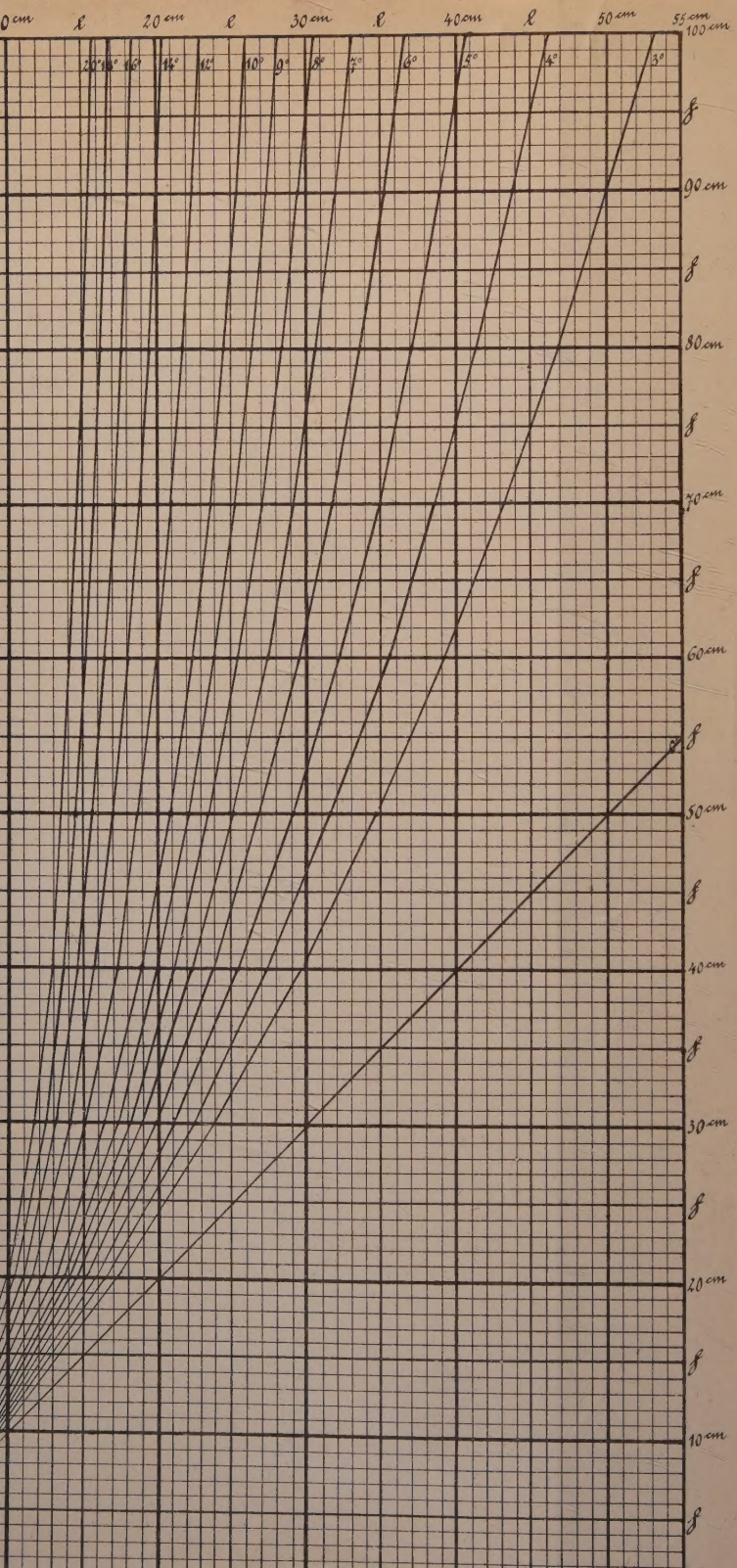


Fig. 5.


0 cm
l
20 cm
l
30 cm
l
40 cm
l
50 cm
55 cm
100 cm
20°
18°
16°
14°
12°
10°
9°
8°
7°
6°
5°
4°
3°
f
90 cm
80 cm
70 cm
60 cm
50 cm
40 cm
30 cm
20 cm
10 cm